Н. Ф. Сесекин, А. И. Старостин, Л. Н. Шеврин

О НАУЧНЫХ ТРУДАХ П. Г. КОНТОРОВИЧА*

Эта тетрадь «Математических записок» посвящена памяти Петра Григорьевича Конторовича (1905–1968). Его имя неразрывно связано с развитием математики на Урале. Старейший профессор Уральского университета, он многие годы возглавлял созданную им кафедру алгебры и геометрии, воспитал большое количество математиков. Широко известна алгебраическая школа, руководителем которой был Конторович. Благодаря его огромной энергии и настойчивости было основано Уральское математическое общество, бессменным председателем правления которого он являлся до самой кончины. По инициативе Петра Григорьевича стали издаваться «Математические записки». Мы не ставим целью осветить всю многогранную деятельность П. Г. Конторовича. Частично это было сделано ранее[1]. Задача настоящей статьи – дать обзор его личного творчества. Основные работы П. Г. Конторовича можно распределить по следующим четырем направлениям: 1) покрытия и расщепления групп, 2) упорядочения групп, 3) полугруппы в группе, 4) решетки и групповые решетки.

1. Покрытия и расщепления групп

Система Σ собственных подгрупп группы G называется *базисом покрытия* для G, если всякий элемент группы G принадлежит какой-то подгруппе системы Σ. Элементы системы Σ называются *компонентами* базиса покрытия. Базис покрытия, компоненты которого попарно пересекаются по единичной подгруппе, называется *базисом расщепления.* П. Г. Конторович поставил

*Статья перепечатывается (с небольшими редакционными поправками) из «Математических записок» Уральского университета (1970. Т. 7, тетр. 3). Указанная тетрадь была посвящена памяти П. Г. Конторовича и содержала также исследовательские статьи В. Д. Белоусова, З. И. Боревича, В. Г. Виляцера и Е. М. Левича, Л. М. Глускина, О. Н. Головина, М. Д. Гриндлингера, Ю. Ш. Гуревича, А. Д. Кацмана, В. М. Копытова, А. И. Кострикина, Я. Б. Ливчака, Е. С. Ляпина, Вик. Д. Мазурова, В. Т. Нагребецкого и С. Н. Адамова, А. С. Пекелис, Б. И. Плоткина, И. А. Рипса, Г. М. Ромалиса и Н. Ф. Сесекина, В. М. Ситникова и А. И. Старостина, Л. А. Скорнякова, П. А. Фрейдмана, Б. М. Шайна, Л. Н. Шеврина, М. И. Эйдинова. Отметим, что фигурировавший в оригинальной версии термин «структура» в данной статье заменен на ставший общеупотребительным с 1980-х годов термин «решетка». – *Примеч. отв. ред.*

[1]См.: Матем. зап. Урал. ун-та. 1965. Т. 5, тетр. 1. С. 3–4; Успехи матем. наук. 1965. Т. 20, вып. 4. С. 209–212; 1968. Т. 23, вып. 4. С. 239–240.

общую проблему изучения групп по типам базисов покрытий. Еще в [3–5] им изучались вполне расщепляемые конечные группы, т. е. конечные группы с базисом расщепления, компоненты которого циклические. Естественно отнести к вполне расщепляемым и циклические группы. Тогда подгруппа вполне расщепляемой группы также вполне расщепляема. Как показывает пример свободных групп, фактор-группа вполне расщепляемой группы не обязательно вполне расщепляема. Однако для конечных групп это так. Полное описание конечных вполне расщепляемых групп было завершено лишь в конце 50-х годов в результате усилий целого ряда алгебраистов – как зарубежных (Судзуки, Бэр и др.), так и учеников Петра Григорьевича. Это описание легко получить из приведенной ниже классификации конечных расщепляемых групп.

В действительности в работах [3–5] содержится много результатов, справедливых не только для конечных групп. В них также легко усмотреть и истоки тех идей, которые послужили основанием систематической теории групп с базисом расщепления, развитой в [7–11]. Оказалось, что в каждой расщепляемой группе существует неприводимый базис расщепления, т. е. базис расщепления, все компоненты которого уже нерасщепляемы. В [7] неприводимый базис расщепления кратко называется *ω-базисом*, там же приведены основные его свойства. Укажем некоторые из них:

1) полнота: совокупность всех максимальных нерасщепляемых подгрупп расщепляемой группы составляет ее ω-базис;

2) минимальность: всякая компонента произвольного базиса расщепления есть теоретико-множественная сумма компонент ω-базиса;

3) единственность: расщепляемая группа обладает лишь одним ω-базисом;

4) характеристичность: всякий групповой автоморфизм сохраняет ω-базис, перемещая между собой его компоненты; в частности, если какая-либо подгруппа является компонентой ω-базиса, то и любая с ней сопряженная подгруппа также является компонентой ω-базиса.

В [7] также доказано, что группа, допускающая базис расщепления с конечным числом компонент, конечна. На первый взгляд этот факт представляется парадоксальным. Он был усилен в [8], где показано, что пересечение всех компонент несократимого конечного базиса покрытия бесконечной группы бесконечно. (Базис покрытия группы называется *несократимым*, если из него нельзя удалить ни одну из компонент так, чтобы оставшееся множество подгрупп снова являлось бы базисом покрытия.) В 1954 году Б. Нейман доказал, что это пересечение имеет конечный индекс в группе. В частности, каждая из компонент несократимого конечного базиса покрытия имеет конечный индекс.

Чрезвычайно важными и удобными оказались следующие два понятия, введенные Петром Григорьевичем в [8]. Подгруппу U группы G называют *изолированной* в G, если множество всех циклических подгрупп группы G разбивается относительно U на два класса: на класс циклических подгрупп, содержащихся в U, и на класс циклических подгрупп, имеющих с U единичное пересечение. Если в этом определении слово «циклические» заменить на «абелевы», то подгруппу U называют *сильно изолированной* в G. Более общий подход к понятию изолированности рассмотрен в [29]. Группа называется *плотной*, если она не имеет собственных изолированных подгрупп. Расщепляемая группа неплотна, и каждая компонента базиса расщепления изолирована. Наличия базиса покрытия с изолированными компонентами недостаточно для расщепляемости группы. Однако в случае конечных групп это имеет место, как показал в 1965 году ученик П. Г. Конторовича В. М. Бусаркин.

Петр Григорьевич рассмотрел общие свойства изолированных и сильно изолированных подгрупп. В частности, с помощью понятия сильно изолированной подгруппы получены различные характеристики групп Фробениуса. *Группой Фробениуса* называют конечную группу, в которой имеется собственная подгруппа, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая с каждой из своих сопряженных подгрупп. Группа тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда обладает инвариантной собственной сильно изолированной конечной подгруппой. Конечная группа не может иметь более одной сильно изолированной инвариантной подгруппы. Группы Фробениуса составляют весьма важный класс расщепляемых групп. Это подтверждается и описанием конечных расщепляемых групп, которое стало возможным лишь к началу 60-х годов после доказательства Томпсоном теоремы о нильпотентности конечной группы, допускающей регулярный автоморфизм простого порядка, и открытия Судзуки новой серии простых групп.

Конечная группа расщепляема тогда и только тогда, когда она является группой одного из следующих типов (p – простое число):

1) нециклическая p-группа экспоненты p;

2) p-группа, в которой элементы простого порядка порождают собственную подгруппу;

3) группа вида $(A \times P) \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $b^p = e$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ – группа Фробениуса с инвариантным множителем A, и $P \leftthreetimes \langle b \rangle$ – p-группа с изолированной подгруппой P;

4) группа Фробениуса;

5) симметрическая группа 4-й степени;

6) $PGL(2, q)$, $q > 3$ и нечетно;

7) $PSL(2, q)$, $q > 3$;

8) простая группа Судзуки.

Отметим еще, что изучавшиеся в [5] Z-группы были полностью описаны А. И. Старостиным в 1959 году. *Z-группы* – это конечные группы, все собственные подгруппы которых вполне расщепляемы, а сами они не вполне расщепляемы.

Вполне расщепляемые группы без кручения (*R-группы*) были введены в [9, 10], там же даны основные свойства этих групп. Классу R-групп принадлежит значительное число известных групп без кручения. Например, локально нильпотентные группы без кручения и локально свободные группы являются R-группами. Более того, всякая упорядочиваемая группа является R-группой. Однако существуют неупорядочиваемые R-группы. Первый пример такой группы построил а 1959 году ученик П. Г. Конторовича Я. Б. Ливчак. Прямое и свободное произведения R-групп будут снова R-группами. Теории R-групп посвящен один из параграфов монографии А. Г. Куроша «Теория групп», много внимания уделено R-группам в обзоре Б. И. Плоткина «Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы»[2].

Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы группа G без кручения являлась R-группой:

а) в G все максимальные локально циклические подгруппы попарно взаимно просты (условие полного расщепления);

б) для любой пары элементов a и b из G равенство $a^n = b^n$ влечет $a = b$ (закон однозначности извлечения корня);

в) централизатор любого множества элементов в G является изолированной подгруппой;

г) в G все максимальные абелевы подгруппы изолированы.

Из закона однозначности извлечения корня в R-группе вытекает возможность классификации циклических и локально циклических подгрупп из базиса расщепления R-группы по Γ-числам Штейница и по соответствующим родам [11]. Для абелевых групп без кручения такая классификация была получена Бэром в 1937 году. В [11] рассматриваются некоторые свойства R-группы в зависимости от множества ее родов.

Теория R-групп в настоящее время представляет собой весьма обширную область теории групп. Даже краткий обзор результатов этой теории – предмет специальной статьи. Укажем лишь, что значительный вклад в исследование R-групп внес ученик П. Г. Конторовича Б. И. Плоткин. Другой его ученик, М. И. Эйдинов, исследовал несколько более широкий класс πR-групп.

Две работы Петра Григорьевича [6, 12] посвящены группам с базисом покрытия из инвариантных подгрупп (*инвариантно покрываемые группы*). В

[2]Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, вып. 4. С. 89–172.

первой из них, где изучаются в основном конечные группы, проведено исследование общего характера. Пересечение всех максимальных инвариантных подгрупп группы G названо *общей подгруппой.* Для того чтобы конечная группа G без общей подгруппы была инвариантно покрываемой, необходимо и достаточно, чтобы G была изоморфна прямому произведению $Z \times B$, где Z и B разложимы в прямое произведение элементарных абелевых групп и простых некоммутативных групп соответственно (возможно, B – единичная подгруппа). Группа тогда и только тогда инвариантно покрываема, когда ее фактор-группа по коммутанту не циклическая. Далее, в [8] даны две характеристики конечных нильпотентных групп. Под *инвариантно покрываемой в широком смысле* группой понимается группа, которая инвариантно покрываема или циклическая. Конечная группа G тогда и только тогда нильпотентна, когда выполняется одно на следующих условий:

1) группа G обладает инвариантным базисом покрытия из нильпотентных подгрупп;

2) группа G и все ее подгруппы инвариантно покрываемы в широком смысле.

В [12] развиваются идеи работы [6]. Вводится понятие группы с категорией. Пусть $A^{(1)}$ – класс всех абелевых групп. По определению класс $A^{(\eta)}$ состоит из всех групп, каждая из которых обладает инвариантным базисом покрытия из подгрупп предшествующих классов. Группу, принадлежащую какому-либо классу $A^{(\eta)}$, назовем *группой с категорией.* Нильпотентные группы являются группами с категорией, однако существуют группы с категорией и без центра. Для конечных групп свойство быть группой с категорией эквивалентно нильпотентности. В 1954 году Б. И. Плоткин доказал локальную нильпотентность групп с категорией, а в настоящей тетради публикуется статья И. А. Рипса, где установлено совпадение класса групп с категорией с классом бэровских групп.

2. Упорядочения групп

Немало интересных идей было высказано П. Г. Конторовичем в теории упорядоченных алгебраических систем. Многие из них послужили источником исследований его учеников К. М. Кутыева, А. И. Кокорина, В. М. Копытова. Самим Петром Григорьевичем опубликовано по этой тематике немного. В работах [25, 26] рассматриваются частично (решеточно, линейно) упорядоченные группы, в которых для любых элементов a, b, связанных соотношением $a < b$, каждый элемент x обладает одним и только одним из свойств:

$$(A)\ xa < xb,\ ax < bx; \quad (B)\ xa > xb,\ ax > bx.$$

Такие группы названы *полуоднородно частично* (соответственно *решеточно*, *линейно*) упорядоченными, сокращенно п. ч. у. (соответственно п. р. у., п. л. у.). Для того чтобы группа была п. ч. у. (п. р. у., п. л. у.), необходимо и достаточно, чтобы она содержала частично (решеточно, линейно) упорядоченную подгруппу индекса два, отношение порядка в которой сохраняется при внутренних автоморфизмах всей группы. Для случая п. р. у. и п. л. у. групп найдены более точные характеристики. В качестве приложения получены два признака, эквивалентные условию упорядочиваемости тела, один из которых усиливает известный признак Артина.

К этим результатам примыкают исследования Петра Григорьевича, выполненные совместно с Л. Р. Бусаркиной и Н. А. Шумихиной [30]. Здесь рассматриваются разбиения тела на два подмножества, каждое из которых может быть кольцом, полукольцом, группой, полугруппой, модулем, полумодулем. Многие из сочетаний оказались невозможными. Если тело разбивается на полумодуль и группу, то оно может быть упорядочено. Если тело разбивается на кольцо и полугруппу и хотя бы одна из компонент разбиения инвариантна, то тело допускает неархимедово нормирование.

В работах [22] и [36] (см. о них в следующем разделе) рассматриваются решеточно упорядоченные группы.

Многие результаты, полученные П. Г. Конторовичем и его учениками, касающиеся упорядоченных групп, нашли отражение в монографии Л. Фукса «Частично упорядоченные алгебраические системы» (1965).

3. Полугруппы в группе

Работами [13, 15] начался цикл исследований Конторовича, посвященных полугруппам в группе. Исходной точкой для этих исследований явилась связь с вопросами упорядочения групп: как известно, линейная упорядоченность группы эквивалентна наличию в ней чистой, линейной (термины, введенные П. Г.) и инвариантной подполугруппы; отказ от линейности подполугруппы приводит к частичному упорядочению. Указанное обстоятельство позволяет ряд свойств упорядоченных (частично или линейно) групп изучать и формулировать в терминах подполугрупп группы. Это придает дополнительный интерес естественной и с других точек зрения задаче рассмотрения подполугрупп в группе; речь идет, разумеется, о непериодических группах и, главным образом, группах без кручения. Можно отметить по крайней мере два аспекта указанной задачи: изучение строения одной или нескольких подполугрупп группы, изучение взаимного «расположения» подполугрупп и прежде всего решетки всех подполугрупп группы. В работах самого Петра Григорьевича был развит преимущественно первый аспект; второму были посвящены исследования его учеников (Б. И. Плоткина, А. С. Пекелис, К. М. Кутыева, Л. Н. Шеврина).

Полугруппа Γ группы G называется *чистой*, если пересечение $\Gamma \cap \Gamma^{-1}$ пусто либо состоит лишь из единицы; Γ называется *линейной*, если $\Gamma \cup \Gamma^{-1} = G$. Пара подполугрупп A, B группы G называется *покрывающей*, если $A \cup B = G$; покрывающая пара называется *нетривиальной*, если ее компоненты суть собственные подполугруппы. Полугруппа в группе называется *отделимой*, если она является компонентой нетривиальной покрывающей пары. В [15] изучались разнообразные свойства подполугрупп группы без кручения в связи с понятиями чистоты, изолированности, отделимости и т. п. Доказано, например, что во всякой покрывающей паре одна из компонент будет линейной полугруппой; рассмотрены некоторые свойства линейных полугрупп. Особое внимание уделено идеалам полугруппы, инвариантной в порожденной ею подгруппе; все идеалы такой полугруппы являются двусторонними. Доказано, что изолятор любого идеала A такой полугруппы Γ совпадает с пересечением всех минимальных простых идеалов, содержащих A, и состоит из всех элементов Γ, некоторая степень которых принадлежит A.

Эти исследования были продолжены в работе [20] (см. также [17]), первая часть которой посвящена выпуклым подполугруппам и дизъюнкторам – понятиям, распространяющим на общий случай группы без кручения соответствующие понятия для частично или решеточно упорядоченных групп. Во второй части работы [20] для чистой инвариантной полугруппы в группе без кручения строится теория, аналогичная классической теории идеалов в коммутативных кольцах: рассматривается представление идеала в виде пересечения примарных идеалов и т. п. Работы [13, 15, 17, 20] нашли отражение в монографии Е. С. Ляпина «Полугруппы» (1960).

В статьях [18, 19] идеи работы [15] развиваются в другом направлении – изучаются элементы чистой инвариантной полугруппы в группе без кручения в зависимости от типов порождаемых ими главных идеалов. Так возникают понятия изолированного и простого элемента. Рассматриваются также неразложимые элементы.

Дальнейшее развитие идей и методов работ [15] и [20] содержится в [22] и [36]. В [22] понятия выпуклой подполугруппы и дизъюнктора применяются к изучению решеточно упорядоченных групп. Доказано, например, что в ℓ-группе с полугруппой положительных элементов Γ всякая выпуклая ℓ-подгруппа H однозначно определяется выпуклой подполугруппой $H \cap \Gamma$. Характерной особенностью работы [36] (см. также [31] и [35]) является использование понятия строгой изолированности вместо изолированности в предыдущих работах рассматриваемого цикла. Комплекс T, содержащийся в подполугруппе Γ группы G без кручения и содержащий единицу, называется *строго изолированным*, если он содержит всякую подполугруппу $S(a)$, которая содержится в Γ и имеет с T неединичное пересечение (через $S(a)$ обозначается инвариантная подполугруппа, порожденная элементом $a \in G$). Некоторые результаты статьи [36] параллельны аналогичным результатам работ [15] и [20]; так, например, доказано, что обобщенный изолятор идеала A (т. е. пересечение всех строго изолированных идеалов, содержащих A) в чистой инвариантной подполугруппе группы без крученая есть пересечение всех инвариантных простых идеалов, содержащих A. В [22] и [36] более, чем в других работах, упомянутых в этом разделе, обращается внимание на связь изучаемых свойств полугрупп со строением самой группы.

4. Решетки и групповые решетки

Одной из идей, усиленно пропагандировавшихся П. Г. Конторовичем, было применение понятий и методов теории решеток к изучению алгебраических систем. Эта идея нашла воплощение в многочисленных работах его учеников. Сам Петр Григорьевич провел совместно с учениками три интересных исследования в указанном направлении.

Первое – работа [16], где введено важное понятие аддитивного базиса. *Аддитивным базисом* полной решетки S называется такое ее подмножество U, что любой элемент из S представим в виде объединения некоторого множества элементов из U. В [16] некоторые понятии, рассматривавшиеся ранее для групп (такие, как изолированность, расщепляемость и т. п.), были распространены на случай произвольных решеток с аддитивным базисом и в такой общности был изучен ряд свойств упомянутых понятий. Применением этих результатов явилось получение решеточных характеристик нескольких классов групп, в частности, нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения. Работа [16] получила немало откликов в исследованиях других математиков.

Второе – работы [32, 34]. Здесь изучаются аддитивно-дистрибутивные (а. д.) пары и мультипликативно-дистрибутивные (м. д.) пары. *А. д. пара* – это то, что обычно в литературе называется дистрибутивной парой; *м. д. пара* – двойственное понятие. Некоторые свойства а. д. и м. д. пар в произвольной решетке применяются для изучения дистрибутивных пар в решетке подгрупп группы. В частности, доказано, что решетка подгрупп группы G тогда и только тогда не содержит нетривиальных (т. е. с несравнимыми компонентами) а. д. пар, когда G периодическая и покрывается своими силовскими подгруппами; всякая p-группа не содержит нетривиальных а. д. и м. д. пар; в периодической группе с нормализаторным условием всякая а. д. пара подгрупп является м. д. парой и наоборот. Ученик Петра Григорьевича С. Г. Иванов продолжил исследования, начатые в [32, 34], рассмотрев произвольные дистрибутивные системы элементов в решетке и подгрупп в группе.

Третье – работа [40] о симметрических решетках. Решетка называется *симметрической*, если на ней задана дополнительная унарная операция, являющаяся автоморфизмом второго порядка. Это понятие введено П. Г. Конторовичем. В [40] рассмотрен ряд общих свойств симметрических решеток, а также приведены некоторые приложения к случаю решетки всех подполугрупп группы без кручения (эта решетка превращается в симметрическую, если в качестве упомянутой унарной операции взять переход к подполугруппе обратных элементов). Публикуемая в настоящей тетради заметка Л. Н. Шеврина о симметрической решетке подполугрупп группы возникла в связи с вопросом, который интересовал Петра Григорьевича**.

Петр Григорьевич неоднократно выступал с докладами на различных научных конференциях, как всесоюзных, так и международных [21, 24, 27, 28, 33, 35, 37, 38]. Его выступления всегда вызывали интерес и играли большую роль в распространении волнующих Петра Григорьевича идей и вопросов. Наиболее заметными были доклады Конторовича на III Всесоюзном математическом съезде и III Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре. Петр Григорьевич был участником всех алгебраических коллоквиумов, состоявшихся при его жизни, председателем оргкомитета третьего коллоквиума и членом оргкомитета всех последующих. Он входил в оргкомитет и первых двух Всесоюзных симпозиумов по теории групп. В 1963 году Петр Григорьевич принял участие в международной конференции по теории упорядоченных множеств в Чехословакии, на которой выступил с большим докладом о результатах свердловских алгебраистов по упорядоченным группам. П. Г. Конторович принимал участие и в работе Международного конгресса математиков в Москве в 1966 году.

П. Г. Конторович хорошо чувствовал тенденции развития многих разделов алгебры. Разнообразные идеи, выдвигавшиеся им, активно разрабатывались его учениками. Особую роль играли некоторые конкретные проблемы, поставленные Петром Григорьевичем. Одни из них уже решены, другие остаются открытыми и по сей день. Например: существуют ли плотные группы

**Ключевой результат упомянутой заметки устанавливает, что в симметрической решетке подполугрупп произвольной группы унарная операция может быть задана формулой первого порядка в решеточной сигнатуре. – *Примеч. отв. ред.*

без кручения, отличные от локально циклических? Существуют ли R-группы без нетривиальных покрывающих пар подполугрупп?***

Многие замыслы Петра Григорьевича остались неосуществленными. Сделанное же им занимает достойное место в алгебраической науке.

Список научных трудов П. Г. Конторовича

1. Об оценке нижней границы точек Вейерштрасса для негиперэллиптического поля алгебраических функций // Изв. Казан. физ.-матем. о-ва. 1934. Т. 7. С. 99–101.

2. О некоторых свойствах полупрямых произведений // ДАН СССР. 1939. Т. 22. С. 557–559.

3. О разложении группы в прямую сумму подгрупп. I // Матем. сб. 1939. Т. 5. С. 289–296.

4. О разложении группы в прямую сумму подгрупп // Учен. зап. Свердл. пед. ин-та. 1940. Вып. 4.

5. О разложении групп в прямую сумму подгрупп. II // Матем. сб. 1940. Т. 7. С. 27–33.

6. Инвариантно покрываемые группы. I // Там же. 1940. Т. 8. С. 423–430.

7. Группы с базисом расщепления. I // Там же. 1943. Т. 12. С. 56–70.

8. Группы с базисом расщепления. II // Там же. 1946. Т. 19. С. 287–308.

9. К теории некоммутативных групп без кручения // ДАН СССР. 1948. Т. 59. С. 213–216.

10. Группы с базисом расщепления. III // Матем. сб. 1948. Т. 22. С. 79–100.

11. Группы с базисом расщепления. IV // Там же. 1950. Т. 26. С. 311–320.

12. Инвариантно покрываемые группы. II // Там же. 1951. Т. 28 С. 79–88.

***В оригинальной версии статьи здесь были сделаны также ссылки на заметку [39] и на первые два издания «Коуровской тетради», куда Конторович записал эти проблемы. Обе они были решены вскоре после 1970 года: первая – С. И. Адяном (ответ: существуют; см.: Известия АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 3. С. 459–468), вторая – С. Прайдом и Дж. Уайголдом (ответ: существуют; см.: Bull. London Math. Soc. 1977. Vol. 9, № 1. P. 36–37). Конструкция, решающая первую проблему, приведена С. И. Адяном и в его книге «Проблема Бернсайда и тождества в группах» (1975), см. там гл. VII, §1. – *Примеч. отв. ред.*

13. К теории полугрупп в группе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. С. 229–231.

14. Об одном методе Н. И. Лобачевского нахождения целых решений целочисленных линейных однородных уравнений // Успехи матем. наук. 1953. Т. 8, вып. 1. С. 145–149 (совм. с Д. П. Мильманом).

15. К теории полугрупп в группе. I // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. Вып. 114. С. 35–43.

16. Структуры с аддитивным базисом // Матем. сб. 1954. Т. 35. С. 187–192 (совм. с Б. И. Плоткиным).

17. Некоторые вопросы теории полугрупп в группах // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11, вып. 1. С. 255.

18. О типах элементов в полугруппе // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11, вып. 1. С. 258.

19. Некоторые типы элементов полугруппы, инвариантной в группе // Там же. 1956. Т. 11, вып. 3. С. 145–150 (совм. с А. Д. Кацманом).

20. К теории полугрупп в группе. II // Учен. зап. Урал. ун-та. 1956. Вып. 19. С. 3–20.

21. К теории полугрупп в группе // Тр. III Всесоюз. матем. съезда. М., 1956. Т. 1. С. 25–26.

22. К теории структурно упорядоченных групп // Изв. вузов. Математика. 1959. № 3. С. 112–120 (совм. с К. М. Кутыевым).

23. Замечание о гиперцентрах групп // Учен. зап. Урал. ун-та. 1960. Вып. 23. С. 27–29.

24. Структурные вопросы теории групп // Матем. зап. Урал. ун-та. 1961. Т. 3, тетр. 1. С. 3–50 (совм. с А. С. Пекелис и А. И. Старостиным).

25. Об одном типе частично упорядоченных групп // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, вып. 2. С. 231–232 (совм. с А. И. Кокориным).

26. Об одном типе частично упорядоченных групп // Матем. зап. Урал. ун-та. 1962. Т. 3, тетр. 3. С. 39–44 (совм. с А. И. Кокориным).

27. Изолированные и инвариантные базисы покрытия групп // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17, вып. 6. С. 226–227 (совм. с В. М. Бусаркиным, Ю. Ш. Гуревичем, А. И. Старостиным и М. И. Эйдиновым).

28. Изолированные комплексы в группах // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 3. С. 4–20 (совм. с В. М. Бусаркиным).

29. Об одном классе групп, близких к упорядочиваемым // V Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. Новосибирск, 1963 (совм. с А. И. Кокориным, В. М. Копытовым и Ю. Ш. Гуревичем).

30. О некоторых теоретико-множественных разбиениях тел // Матем. зап. Урал. ун-та. 1963. Т. 4, тетр. 1. С. 49–56 (совм. с Л. Р. Бусаркиной и Н. А. Шумихиной).

31. Строго изолированные идеалы // Докл. III Сибир. конф. по математике и механике. 1964. С. 227–228 (совм. с Л. А. Пруткиной).

32. Дистрибутивные пары элементов в структуре // ДАН СССР. 1964. Т. 160. С. 1001–1003 (совм. с С. Г. Ивановым и Г. П. Кондрашовым).

33. Дистрибутивные пары элементов в структуре // Матем. зап. Урал. ун-та. 1964. Т. 5, тетр. 1. С. 43–48 (совм. с Г. И. Ивановым и Г. П. Кондрашовым).

34. Вопросы линейного и структурного упорядочения групп // Тр. естественно-историч. фак. ун-та им. Я. Э. Пуркинье. Брно, 1964. Т. A28. С. 472–473.

35. Строгая изолированность в полугруппах // VII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. Кишинев, 1965 (совм. с Л. А. Пруткиной).

36. Некоторые классы эквивалентности полугрупп // Матем. зап. Урал. ун-та. 1966. Т. 5, тетр. 3. С. 60–74 (совм. с Л. А. Пруткиной).

37. О покрытии группы подгруппами // Тез. кратких сообщ. Международ. матем. конгр. в Москве. Секция 2. Алгебра. М., 1966. С. 43–44.

38. Дистрибутивные системы и линейная независимость // II Всесоюз. сими. по теории групп. Батуми, 1967 (совм. с С. Г. Ивановым).

39. Три проблемы по расщеплению групп // Coll. Math. 1967. Vol. 17, № 2. P. 207–208.

40. Симметрические структуры // Сиб. матем. жури. 1969. Т. 10, № 3. С. 537–548 (совм. с К. М. Кутыевым).